CHAPITRE M1

Statique des fluides

I - Modèle du fluide continu

I.A - Aux échelles macroscopique et microscopique

I.A.1 - Echelle macroscopique

Rappel
L'échelle macroscopique est l'échelle globale, observable à l'œil nu. La matière y est considérée continue, mais ses propriétés (T, P, ρ) (avec ρ la masse volumique) peuvent être discontinues.

On peut considérer que l'échelle macroscopique est celle des objets d'une taille supérieure à 10^{-4} m.

Définition (Fluide à l'échelle macroscopique)

A l'échelle macroscopique, un fluide est un milieu matériel capable de se déformer et de s'écouler jusqu'à adopter la forme de son contenant.

Remarque
Cette définition est peu satisfaisante : certains fluides ne la respectent pas toujours (ex : dentifrice, ketchup). D'autres matériaux ne sont pas des fluides mais la respectent (ex : sable, bitume).
On s'en accomode, parce que la définition fonctionne pour une très grande majorité de matériaux.

I.A.2 - Echelle microscopique

Rappel
L'échelle microscopique est l'échelle des atomes et des molécules, non observable à l'œil nu. La matière y est discontinue.
On peut considérer que l'échelle microscopique est celle des objets de tailles proches de la distance du libre parcours moyen (=distance entre deux collisions de molécules ou atomes), c'est-à-dire 10^{-8} m.

Définition (Fluide à l'échelle microscopique)

A l'échelle microscopique, un fluide est caractérisé par des interactions intermoléculaires assez faibles par rapport aux énergies d'agitation thermique. Ainsi, les molécules peuvent facilement se déplacer les unes par rapport aux autres.

Remarque
Cette échelle est plus précise, mais rend les calculs beaucoup trop compliqués !
On introduit donc une échelle intermédiaire : l'échelle mésoscopique.

I.B - Echelle mésoscopique : particule fluide

Définition (Echelle mésoscopique)

Modèle : particule fluide

Application

Un modèle simple, qu'on montrera plus tard, permet de prévoir l'évolution de la masse volumique locale en fonction de l'altitude.

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/\delta)$$

avec $\rho_0 = 1,3$ kg.m^{-3} et $\delta = 8$ km.
Dans le cadre de ce modèle, estimer la masse d'air reposant sur vos épaules.

II - Champ de force dans un fluide au repos

II.A - Forces volumiques et surfaciques

Vocabulaire

Force volumique associée au poids

Le poids est associée à une force volumique de pesanteur

$$\overrightarrow{f_{v,pes}} = \rho \overrightarrow{g}$$

où ρ est la masse volumique et $\overrightarrow{g}$ l'accélération de la pesanteur terrestre.

Démonstration

II.B - Une force surfacique : la force de pression

Définition (Force pressante)

On appelle **force pressante** la composante normale à la surface de contact de la force exercée par une particule fluide sur une interface (autre particule fluide ou solide).

Remarque
La composante tangentielle sera appelée force visqueuse (ou de viscosité), mais on l'introduira dans le prochain chapitre, car elle est nulle pour un fluide au repos.

Champ de pression

La force exercée par le fluide dans lequel règne une pression P sur un élément mésoscopique de surface dS centrée en M est purement normale dans un fluide au repos et s'exprime :

$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont TOUJOURS orienté VERS l'extérieur.

Remarques

⋆ C'est comme ça qu'on définit la pression en PTSI !
⋆ Autres unités de la pression :

- le bar : 1 bar = 10^5 Pa
- le millimètre de mercure : 1 mmHg = 133 Pa
- l'atmosphère : 1 atm = 1,013 bar

III - Champ de pression dans un fluide au repos

III.A - Relation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

Rappel - opérateur gradient

Relation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

En tout point d'un fluide au repos, dans le seul champ de pesanteur,

Remarque

Astuce pour retrouver le signe : P diminue quand on s'élève et augmente quand on s'enfonce.

Outil mathématique

On utilisera souvent

$$f(x, y, z + dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Pour s'en convaincre, deux approches :

- Par l'accroissement fini :
  par définition,
  $$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}$$
  et par définition, $dz \to 0$, on peut donc approximer
  $$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f(x, y, z + dz) - f(x, y, z)}{dz}$$
- Par un développement limité à l'ordre 1 :
  $$f(x, y, z + dz) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z} \times (z + dz - z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Démonstration

III.B - Conséquence : champ de pression dans un fluide incompressible

III.B.1 - Loi de pression hydrostatique

Loi de pression hydrostatique

Dans un liquide incompressible, la pression ne dépend que de la profondeur et évolue linéairement :

Démonstration

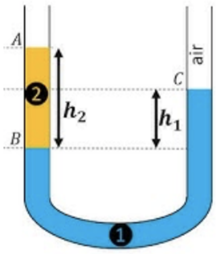
III.B.2 - Applications

Baromètre de Toricelli

Remarque
C'est la définition de l'unité historique de la pression (le mmHg).
Comme $\rho_{Hg} \simeq 10^4$ kg.m-3, on a bien $P(h = 1 \text{ mm}) = 10^2$ Pa

Manomètre à liquide

Application



On considère deux fluides dans un tube en U, de masse volumique ρ_1 et ρ_2.
Trouver la relation entre ρ_1, ρ_2, h_1 et h_2.

III.C - Conséquence : modèle de l'atmosphère isotherme

Dans l'atmosphère, on ne peut plus supposer que ρ est uniforme...

Modèle de l'atmosphère isotherme

Dans l'atmosphère isotherme, en supposant que l'air est un gaz parfait, on a

Démonstration

Corollaire

Démonstration

IV - Résultante des forces de pression subies par un solide

Rappel

La force pressante subie par un élément mésoscopique de surface dS s'écrit

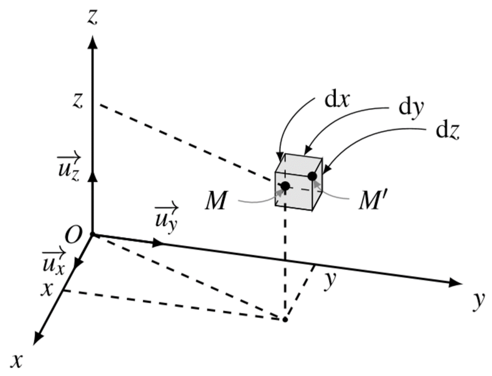
$$\overrightarrow{dF} = P(M)dS\overrightarrow{n}$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal à dS, dirigé du fluide vers la paroi

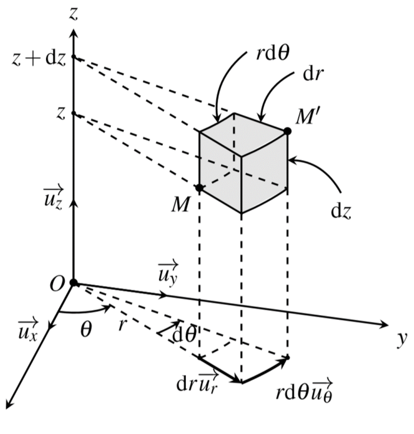
Méthode - Etablir l'expression d'une résultante des forces de pression

IV.A - Rappels mathématiques

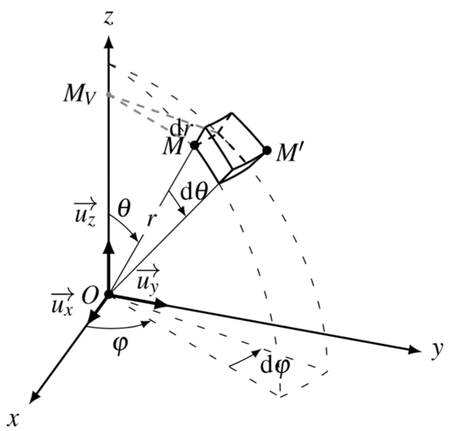
IV.A.1 - Coordoonées cartésiennes



IV.A.2 - Coordoonées cylindriques

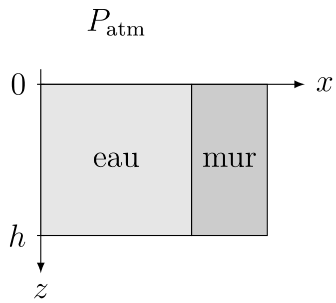


IV.A.3 - Coordoonées sphériques



IV.B - Paroi plane soumise à la pression hydrostatique

Application

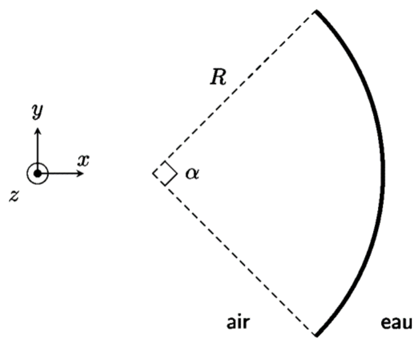


On s'intéresse à un pan de mur vertical d'une piscine de profondeur $h = 4$ m. Le pan de mur est large de $L = 10$ m dans la direction (Oy).

Calculer la force de pression subie par le mur.

IV.C - Barrage voûte

Application



Un barrage voûte est ainsi nommé en raison de sa forme arquée caractéristique. La forme courbe de ces barrages permet de reporter les efforts dus à la poussée de l'eau sur chaque côté des rives. On modélise un tel barrage par un quart de cylindre de hauteur $H = 135$ m, rayon R et d'ouverture $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

On se place en coordonnées cylindiques d'axe (Oz) ascendant dont l'origine coïncide avec le fond du barrage. Calculer la résultante des forces de pression sur le barrage.

IV.D - Cas d'un solide immergé : poussée d'Archimède

Poussée d'Archimède

Soit un corps de masse volumique ρ_c dans un fluide de masse volumique ρ_f.

Sommaire